

Determinación de frecuencias y modos normales de vibración de sistemas lineales a través de redes neuronales artificiales

Juan Giró^{1,2}, Sandra Olariaga¹, Alejandro Garcia¹ y Nancy Paez¹

¹ Departamento de Ingeniería de Sistemas de Información, Facultad Regional Córdoba, Universidad Tecnológica Nacional, Córdoba, Argentina, secresis@bbs.frc.utn.edu.ar

² Departamento de Estructuras, Facultad de C.E.F. y N., Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba, Argentina, juanfgiro@gmail.com

Abstract. Las técnicas de identificación de parámetros de sistemas dinámicos muestran en la actualidad una clara orientación hacia los modelos de caja negra, ocupando allí un lugar destacado las Redes Neuronales Artificiales. En este trabajo se propone un procedimiento para la determinación de frecuencias y modos normales de vibración de sistemas mecánicos en tres etapas. En la primera se ajusta un modelo regresivo a partir de los registros temporales de excitación y respuesta, empleándose para ello Redes Neuronales Artificiales de tipo Adaline y Perceptrones multicapa. En la segunda etapa se determinan vectores desplazamiento, velocidad y aceleración en base al modelo anterior, se plantea un modelo de estado y se determina la matriz del sistema. Finalmente, una vez conocida la matriz dinámica, queda abierto el camino para calcular frecuencias y modos de vibración por los procedimientos habituales. Se presenta la justificación del método propuesto y un análisis de la sensibilidad de los resultados a las incertidumbres en las señales de entrada.

Keywords: Frecuencias y Modos de Vibración, Modelos Regresivos, Redes Neuronales Artificiales, Redes Adaline, Redes Multicapa de Perceptrones.

1 Introducción

El objetivo de la identificación de parámetros es conocer los valores característicos de un sistema, en este caso un sistema mecánico, a partir de su respuesta a la acción de cargas que varían en el tiempo. Esto constituye una forma de planteo inverso al habitual, que se presenta cuando se busca determinar la respuesta de cierta estructura a las cargas aplicadas. Por otra parte, existe una segunda forma de planteo inverso cuando su finalidad es identificar las cargas necesarias para que cierto sistema se comporte acorde a una respuesta previamente establecida, lo que representa un problema clásico de la teoría de control. Cabe aquí aclarar que cuando se habla de planteos inversos no se lo hace con un sentido estrictamente matemático,

sino más bien con un sentido conceptual. Naturalmente, para identificar los parámetros de un sistema dinámico primero hay que acotarlo dimensionalmente, razón por la cual este proceso implica la definición de un sistema equivalente, que es normalmente más simple que el sistema o estructura que se espera representar. Así, la identificación de parámetros resulta un medio adecuado para la obtención de sistemas equivalentes y los valores característicos obtenidos representan propiedades que podrían denominarse *condensadas*, tanto másicas como disipativas y elásticas. El calificativo de *condensadas* tiene su origen en el planteo directo del problema, donde a través de elementos finitos se obtienen las matrices de inercia, amortiguamiento y rigidez del modelo y posteriormente la cantidad de grados de libertad es reducido en concordancia con el tipo de estudio que se quiere realizar.

En la actualidad, existen numerosas líneas de investigación que centran su atención en el modelado e identificación de parámetros de sistemas dinámicos. Una de las más importantes se orienta a los modelos denominados de “caja negra”, en el sentido que su definición se basa en su comportamiento, es decir los registros temporales de las excitaciones y sus respuestas, prescindiendo del planteo de la formulación matemática del fenómeno estudiado. Dentro de estos nuevos enfoques están ocupando un lugar destacado las redes neuronales artificiales y en este trabajo se concentra la atención en las denominadas redes “hacia delante” o “feedforward”, como son las redes Adaline y de Perceptrones.

Hay tres aspectos que justifican la utilización de este tipo de redes neuronales en el modelado de sistemas dinámicos. El primero se refiere a su aptitud para aproximar funciones complejas y altamente no lineales, lo que permite desarrollar modelos que servirán para la posterior identificación de parámetros. El segundo es su capacidad de aprendizaje, lo que hace posible ajustar el modelo a través de procesos que, con los algoritmos actualmente disponibles, han reducido mucho los clásicos problemas de convergencia. Por último, es necesario destacar la tolerancia de las redes neuronales a datos imprecisos o incompletos, los que las hace especialmente apropiadas para aplicaciones en las que se opera con datos originados en mediciones sobre el mismo sistema.

Con referencia al primer aspecto, Kolmogorov demostró que toda red que disponga de por lo menos una capa oculta y contenga en ella una adecuada cantidad de unidades convenientemente entrenadas adquirirá el carácter de aproximador universal [1], es decir, será capaz de reproducir cualquier función continua y no lineal que pueda estar definida en cierto hiperespacio.

En segundo lugar, se debe observar que las redes neuronales artificiales son sistemas masivamente paralelos, que materializan su capacidad de aprendizaje a través de la modificación de los pesos de interconexión entre sus neuronas. Más aún, existe la posibilidad de alterar en forma dinámica la topología de una red, es decir, su número de capas, la cantidad de neuronas en cada capa o la manera como éstas son interconectadas, lo que ofrece otras formas menos convencionales de aprendizaje y brinda gran flexibilidad a este proceso. Todas estas técnicas tienen su antecedente en el método de *Backpropagation* de Rumelhart [2], que estimuló una verdadera revolución en el campo de las redes neuronales y se convirtió en un clásico.

El último aspecto señalado es la tolerancia a datos imprecisos o incompletos. En efecto, las redes neuronales son capaces de reconocer patrones a partir de señales con ruido, distorsionadas o incompletas, debido a que la información está distribuida en las conexiones entre neuronas y además en este tipo de almacenamiento existe cierto grado de redundancia. Estudios recientes, como los realizados por Chandra y Singh [3],

han demostrado que la redundancia es el factor condicionante tanto de la tolerancia a ruido como también de la capacidad de generalización, y que ambas son a su vez propiedades mutuamente relacionadas entre sí.

Cuando se mencionan los buenos desempeños que exhiben las redes neuronales artificiales como aproximadores de funciones desconocidas, también deben reconocerse sus debilidades. En su mayoría, éstas se refieren a aspectos específicos de su configuración y entrenamiento, donde se presentan múltiples posibilidades y se carece de recomendaciones definitivas que permitan seleccionar las más convenientes para cada caso. Aquí deben mencionarse: a) la arquitectura de la red, en lo que se refiere a la cantidad de capas, las unidades por capa y los vínculos entre ellas, b) las funciones de activación, que pueden ser lineales, hiperbólicas, sigmoidales o una combinación de ellas, c) los pesos iniciales más apropiados y d) las técnicas para el proceso de entrenamiento. A pesar de que estos aspectos son objeto de intenso estudio, por el momento no puede evitarse una tarea de exploración hasta encontrar la combinación más conveniente para cada caso.

Sin embargo, en los casos en que es posible anticipar la forma general de las expresiones diferenciales que gobiernan el problema, como aquí ocurre, se puede aplicar este conocimiento para definir modelos lo más específicos posible. De esta manera, al representarse fenómenos conocidos se reducen drásticamente las opciones que presenta el modelo neuronal. La idea de que la arquitectura de las redes neuronales debe estar inspirada en el conocimiento sobre la naturaleza de los fenómenos representados es atribuible a Rudolph y Haecker [4], quienes aseguraron que ese es el camino para obtener modelos simples, eficientes y previsibles.

Lo anteriormente mencionado permite afirmar que las redes neuronales artificiales ofrecen una opción válida para implementar modelos inversos de sistemas dinámicos y el procedimiento que aquí se presenta las adopta como base para la posterior identificación de sus parámetros. El resto de este trabajo se organiza de la siguiente manera, en la *Sección 2* se justifica el modelo neuronal regresivo que es adoptado para representar el sistema, y luego, en la *Sección 3* se formula un procedimiento que se apoya en ese modelo para determinar frecuencias naturales y modos de vibración. La sensibilidad del modelo es estudiada en la *Sección 4* y finalmente, en la *Sección 5* se presentan las conclusiones de este trabajo e ideas para futuros desarrollos.

2 Modelo Neuronal Regresivo

Como ya fue mencionado, en el primer paso se emula el comportamiento de una función desconocida a partir de los valores de su respuesta a la acción de cierta condición de excitación. Este método suele ser denominado *ARX* (*Auto Regresivo y Exógeno*) en alusión a que: 1) cada valor de respuesta “*y*” es determinado a partir de otros valores obtenidos por el mismo modelo, 2) estos corresponden a instantes anteriores y 3) representan la respuesta de un sistema a una acción externa “*u*”. La expresión general para la respuesta es la siguiente:

$$y_k = \sum_{j=1}^n \alpha_j y_{k-j} + \sum_{j=1}^m \beta_j u_{k-j} + e_k . \quad (1)$$

donde “ n ” es la cantidad de valores de la respuesta correspondientes a instantes anteriores y “ m ” es la cantidad de valores de la excitación. Notar que “ n ” representa el orden del modelo y que el término e_k representa su error. También hay que tener presente que normalmente se emplean valores de $m \leq n$, y que en el caso de tratarse de un sistema de “ q ” grados de libertad, con $q > 1$, tanto la respuesta “ y ” como la acción “ u ” quedan representadas por vectores, mientras que α y β quedan representados por matrices.

En la literatura es frecuente encontrar referencias a la imposibilidad de predecir la cantidad de valores de n y m que son más convenientes para resolver cada problema específico [5]. Sin embargo, debe considerarse que en la representación de funciones se distinguen dos casos que son esencialmente distintos, como es el de representar fenómenos absolutamente desconocidos y el de modelar sistemas que responden a principios físicos claramente establecidos. En el primer caso se trata de verdaderos modelos de cajas negras, solo expresables a través de sus relaciones de entrada-salida, mientras que en el segundo es posible anticipar la forma general de las expresiones diferenciales que gobiernan el problema. Como ya fue anticipado, es recomendable aplicar este conocimiento para guiar la definición del modelo y hacerlo tan específico como sea posible.

Considerando el caso de un sistema elástico lineal de varios grados de libertad, su equilibrio dinámico queda representado por un sistema de ecuaciones diferenciales que tienen la siguiente forma general:

$$M \ddot{y} + C \dot{y} + K y = u . \quad (2)$$

donde M , C y K representan las matrices de inercia, amortiguamiento y rigidez respectivamente. Para resolver numéricamente este problema se recurre a fórmulas de diferencias finitas de 4º orden que expresen la velocidad y aceleración en función de los desplazamientos en cuatro intervalos anteriores:

$$\begin{aligned} \dot{y}_{t+\Delta t} &= (11y_{t+\Delta t} - 18y_t + 9y_{t-\Delta t} - 2y_{t-2\Delta t}) / (6\Delta t) \\ \ddot{y}_{t+\Delta t} &= (2y_{t+\Delta t} - 5y_t + 4y_{t-\Delta t} - y_{t-2\Delta t}) / (\Delta t^2) \end{aligned} \quad (3)$$

Luego se considera la ecuación de equilibrio dinámico (2) en el instante $t+\Delta t$, se reemplazan la aceleración y velocidad por las expresiones (3), se agrupan finalmente los términos y se llega a una ecuación que es atribuida a Houbolt [6] que tiene la siguiente forma general:

$$y_{t+\Delta t} = A y_t + B y_{t-\Delta t} + D y_{t-2\Delta t} + E u_{t+\Delta t} . \quad (4)$$

donde las matrices A , B , D y E quedan expresadas como una combinación lineal de las matrices M , C y K , tal como lo muestran en las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} A &= H^{-1} [(5/\Delta t^2)M + (3/\Delta t)C] \\ B &= -H^{-1} [(4/\Delta t^2)M + (3/2\Delta t)C] \\ D &= H^{-1} [(1/\Delta t^2)M + (1/3\Delta t)C] \\ E &= H^{-1} \\ H &= (2/\Delta t^2)M + (11/6\Delta t)C + K \end{aligned} \quad (5)$$

Al adoptarse este planteo se persiguieron dos objetivos: el primero fue acotar la cantidad de términos de la expresión general (1) a partir de un criterio racional, eliminando la mencionada incertidumbre respecto de los valores más convenientes para n y m , que en este caso son tres y uno respectivamente. El segundo objetivo fue disponer de información sobre el comportamiento que podía esperarse de un modelo de estas características. Para esto último se recurrió a algunos de los numerosos trabajos que evaluaron la propuesta de Houbolt, varios de los cuales se encuentran resumidos en un estudio de Semler [7], de donde se pudieron extraer valiosos antecedentes, tales como los siguientes:

- a) Este planteo demostró ser uno de los más eficientes para integrar ecuaciones correspondientes a problemas de valor inicial de sistemas elastoplásticos dinámicos.
- b) El proceso numérico es incondicionalmente estable en la resolución de sistemas lineales.
- c) Introduce un leve amortiguamiento y distorsión en las frecuencias, tal como ocurre con la mayoría de los métodos numéricos que integran ecuaciones de movimiento.

Estas consideraciones permitieron anticipar que el modelo propuesto en (4) era apto para representar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales mostradas en (2), a condición de que los elementos de las matrices A , B , D y E pudiesen ser determinados.

Obsérvese que, si se tratara de en un planteo directo, las matrices M , C y K son todas conocidas y la solución del problema queda expresada por las ecuaciones (5).

Por el contrario, este es un planteo inverso en el que M , C y K no son conocidas y por esta razón se recurre a las redes neuronales artificiales para desarrollar un modelo de caja negra que represente la expresión (4). Por tratarse de un problema lineal, resulta conveniente utilizar un conjunto de unidades Adaline (*Adaptive Linear Element*), y más precisamente, tantas unidades Adaline como grados de libertad tenga el sistema representado. Para el entrenamiento de estas redes se emplea un proceso de ajustes sucesivos denominado genéricamente “del gradiente descendente”, para el cual es necesario disponer de registros de las respuestas del sistema a ciertas condiciones de excitación. Con este proceso, que busca encontrar el mínimo de la función error ε , se determinan los pesos sinápticos w_i de las redes, que son los elementos de las matrices A , B , D y E . Para ello se define ε a partir de la ecuación (4):

$$\varepsilon = y'_{t+\Delta t} - (A y'_t + B y'_{t-\Delta t} + D y'_{t-2\Delta t} + E u'_{t+\Delta t}). \quad (6)$$

donde los conjuntos de pares de entrenamiento $\{u', y'\}$ están formados por los vectores de valores conocidos de la excitación y los vectores de respuesta del sistema. Luego se define el escalar J que representa el error global de la red:

$$J = \varepsilon^T \varepsilon, \quad \frac{\partial J}{\partial w} = 0. \quad (7)$$

cuyo mínimo es buscado en el hiperespacio w de los pesos sinápticos de la red neuronal a través del mencionado método del gradiente descendente.

3 Identificación del sistema

3.1 Falta de una solución única y su consecuencia

En primera instancia parecería que el problema ha quedado resuelto. Una vez conocidas las matrices A , B , D y E no debería haber mayores inconvenientes para deducir los parámetros representados por las matrices M , C y K , ya que ambos grupos de matrices están vinculados por las expresiones (5). Sin embargo, se presenta aquí una dificultad inesperada. Ocurre que A , B , D y E no representan una solución única para el problema formulado en (6) y (7). En otras palabras, hay numerosas matrices A , B , D y E diferentes que son capaces de representar con muy buena aproximación la función desconocida a través de la ecuación (4), pero cuyos valores no conducirán a valores correctos para las matrices M , C y K . Esto se debe a que el funcional J que se pretende minimizar presenta múltiples mínimos locales, que tienen su origen en la inadecuada excitación empleada en la determinación de la respuesta del sistema.

Así, al procurar Aström y Eykhof [8] tipificar los requerimientos que deben cumplir las señales de excitación a fin de que un sistema sea identificable, introdujeron el concepto de excitación persistente, que es reconocido como requerimiento indispensable para que sea posible alcanzarse el mínimo absoluto al minimizarse J . Allí se establece que las señales de excitación deben tener un espectro de frecuencias suficientemente amplio, de manera de perturbar al sistema en forma apropiada. Sin embargo, no es fácil asegurar tal condición y mucho menos si se trata de la excitación de estructuras reales, por lo que la viabilidad práctica de identificar los parámetros por este camino debió ser descartada.

3.2 Determinación de valores característicos

A raíz del inconveniente antes mencionado fue necesario buscar otras alternativas para la identificación de los parámetros del sistema y con este fin se desarrolló el procedimiento que a continuación se describe. A partir del modelo neuronal regresivo se determina la respuesta “ y ” del sistema a las condiciones iniciales y/o de excitación que parezcan más apropiadas según cada caso. Una vez conocido el vector respuesta “ y ”, se emplean las expresiones (3) para calcular los vectores de velocidad \dot{y} y de aceleración \ddot{y} , todos ellos de dimensión “ q ”. Estos desplazamientos y velocidades son luego agrupados en un *vector de estado* de dimensión $2q$ denominado z :

$$z = \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ y \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

y se reformula la ecuación (2) en función de z :

$$\dot{z} = Az + Bu. \quad (9)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -M^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Los “ p ” vectores columna z y u , correspondientes a otros tantos instantes “ p ” de la respuesta del sistema, pueden agruparse en las matrices Z y U de forma tal que:

$$Z = [z_1 z_2 z_3 \dots z_p] \quad , \quad U = [u_1 u_2 u_3 \dots u_p] . \quad (11)$$

A partir de (9) y (11) se obtiene la siguiente expresión que considera el comportamiento del sistema en todos los instantes “ p ”:

$$\dot{Z} = AZ + BU . \quad (12)$$

Reordenando y postmultiplicando ambos miembros por la pseudoinversa de la matriz Z se obtiene una expresión que permite determinar A :

$$A = (\dot{Z} - BU)Z^+ . \quad (13)$$

donde $Z^+ = (Z^T Z)^{-1} Z^T . \quad (14)$

Considerando ahora que la excitación U es nula, es decir que el sistema solo responde a ciertas condiciones iniciales en ausencia de cargas exteriores, se tiene:

$$A = \dot{Z}Z^+ . \quad (15)$$

y teniendo en cuenta la definición de A de la ecuación (10) se deduce que:

$$A_{11} = -M^{-1}C \quad , \quad A_{12} = -M^{-1}K . \quad (16)$$

Aquí puede comprobarse que para implementar el cálculo de la matriz A no es conveniente usar expresión (15), sino hacer un análisis similar a partir de la transpuesta de la expresión (12), que conduce a una expresión equivalente:

$$A^T = (Z^T)^+ \dot{Z}^T . \quad (17)$$

Obsérvese que, si bien las ecuaciones (15) y (17) son algebraicamente equivalentes, esta última es ventajosa desde el punto de vista numérico. En efecto, el cálculo de la pseudoinversa de la primera ecuación involucra la inversión de una matriz de orden “ p ”, mientras que la determinación de la pseudoinversa de la ecuación (17) involucra la inversión de una matriz de orden $2q$, y siempre $q \ll p$, ya que la cantidad de grados de libertad “ q ” del modelo es siempre muy inferior a la cantidad de intervalos de tiempo “ p ” en el que se considera la respuesta del sistema.

Se llega así a la determinación de la submatriz A_{12} , que abre las puertas al cálculo de las frecuencias y modos normales de vibración del sistema. En efecto, volviendo a la ecuación (2), omitiendo las fuerzas de amortiguamiento y suponiendo una respuesta armónica, se plantea el clásico problema de autovalores que queda expresado como:

$$(M^{-1}K - \lambda I) \bar{y} = 0 \quad , \quad \text{donde: } \lambda = \omega^2 . \quad (18)$$

lo que equivale a decir que

$$(-A_{12} - \omega^2 I) \bar{y} = 0 . \quad (19)$$

en donde ω representa las frecuencias e \bar{y} los modos normales de vibración.

Para los casos en que se conozca la matriz de inercia M , que habitualmente es diagonal, las matrices de rigidez K y amortiguamiento C pueden determinarse a partir

de las ecuaciones (16). En efecto:

$$\begin{aligned} K &= -M A_{12} \\ C &= -M A_{11} \end{aligned} \quad (20)$$

Más aún, cuando sea posible asumir que el amortiguamiento es proporcional a la inercia y rigidez del sistema (amortiguamiento de Rayleigh), se define una matriz Φ que contiene los modos de vibración \bar{y} como sus columnas y se determina la matriz Γ de amortiguamiento generalizado del sistema. Así se pueden conocer los factores de amortiguamiento ξ_i correspondientes a cada modo de vibración:

$$\Gamma = \Phi^T C \Phi = -\Phi M A_{11} \Phi \quad (21)$$

donde

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 2\xi_n\omega_n \end{bmatrix} \quad (22)$$

3.3 Definición del procedimiento de cálculo

Una vez formulada la solución del problema se resume el procedimiento propuesto:

- a) Desarrollar un modelo neuronal capaz de reproducir el comportamiento del sistema estudiado en un cierto intervalo de tiempo. Este modelo estará formado por tantas unidades Adaline como grados de libertad “ q ” tenga el sistema, con un total de $4q$ entradas y “ q ” salidas. Las entradas correspondientes a cada grado de libertad son los desplazamientos en tres intervalos de tiempo sucesivos y la acción externa en el último intervalo, tal como indica la ecuación (4). La salida de cada unidad será el desplazamiento en el intervalo de tiempo siguiente.
- b) Usar el modelo anterior para determinar la respuesta “ y ” del sistema a ciertas condiciones iniciales, en ausencia de cargas exteriores, que aseguren que en esta respuesta habrá componentes de todas las frecuencias de interés.
- c) Obtener mediante las ecuaciones (3) los vectores velocidad y aceleración en los mismos intervalos en que se determinaron los desplazamientos.
- d) Seleccionar desplazamientos, velocidades y aceleraciones correspondientes a cierto número de puntos “ p ”, representativos de la respuesta del sistema.
- e) Con estos vectores armar las matrices Z y \dot{Z} y calcular la matriz A según (17).
- f) Formular el problema de autovalores (19) y calcular frecuencias y modos normales de vibración.
- g) En el caso que pueda conocerse la matriz de inercia M , calcular K y C con las ecuaciones (20).
- h) Determinar los factores de amortiguamiento con las ecuaciones (21) y (22) en los casos en que el modelo de amortiguamiento de Rayleigh sea válido.

4 Resultados

4.1 Modelos Neuronales

Para el ajuste de los modelos neuronales se implementó una versión básica del método de *Backpropagation*. La única mejora fue permitir el ajuste del factor de *aprendizaje* η durante el proceso de entrenamiento [9], mientras que se mantuvo constante el factor de *momentum* θ . Se evitó el uso de algoritmos más sofisticados para tener la mayor sensibilidad a las diferentes condiciones de las señales de entrada.

Los modelos regresivos reprodujeron la expresión (4) a través de unidades Adaline y redes de Perceptrones con una capa oculta. Si bien en todos los casos estas redes demostraron un excelente desempeño, los resultados obtenidos confirmaron la conveniencia de recurrir a los modelos neuronales más simples, ya que estas permiten establecer un paralelismo con los modelos numéricos que representan el problema estudiado. Esto ya fue motivo de un trabajo anterior de los mismos autores [10].

Se utilizaron modelos de sistemas mecánicos lineales de entre uno y tres grados de libertad, con una única señal de excitación, y períodos de las frecuencias naturales superiores a 0,5 segundo. Los conjuntos de entrenamiento correspondieron a segmentos de respuesta de unos 20 segundos, con un intervalo $\Delta t=0,01$ segundo, es decir unos 2000 puntos conocidos de la excitación y respuesta del sistema.

En todos los casos se utilizó la respuesta a una condición de carga para entrenar el modelo y otra respuesta, a una condición de carga diferente, para su validación. Pudo comprobarse, como era de esperar, que los modelos no se limitan a memorizar patrones de conducta del sistema real, sino que verdaderamente capturan sus propiedades, por lo que una vez entrenados reproducen correctamente su respuesta a cualquier condición de excitación. Para ello, es necesario asegurar que la excitación del sistema provoque la presencia de todos los modos de vibración en su respuesta.

4.2 Identificación de parámetros

Para validar el procedimiento presentado se utilizaron los mismos sistemas con los que se desarrollaron los modelos neuronales, de uno a tres grados de libertad. La diferencia fue que en este caso las respuestas correspondieron a condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad, sin cargas exteriores, a fin de aplicar la ecuación (17). Como ya fue comentado, estas condiciones iniciales debieron ser cuidadosamente definidas de manera de asegurar la presencia de todos los modos de vibración en las respuestas de los sistemas. Teniendo en cuenta esta importante condición, en todos los casos pudo comprobarse que el método propuesto permite obtener muy buenos resultados.

Obsérvese que la cantidad de puntos “ p ” de la respuesta de un sistema que se usan en esta etapa no guarda ninguna relación con los puntos utilizados en la etapa anterior, en la que fue entrenado el modelo. Al respecto se hicieron estudios utilizando 500, 200, 100 y 50 puntos, siempre igualmente espaciados, obteniéndose idénticos resultados. Es probable que sea beneficiosa una mayor cantidad de puntos al aumentar la complejidad del sistema y/o disminuir la calidad de los datos empleados en entrenar

el modelo neuronal, pero esto todavía no ha sido estudiado suficientemente como para poder hacer recomendaciones al respecto.

En razón de que éste procedimiento será utilizado para identificar parámetros de sistemas reales, a partir de mediciones sobre su respuesta, se consideró muy importante conocer su sensibilidad a eventuales errores en las señales de entrada. Para ello se usaron respuestas obtenidas numéricamente, a las que se les sumó un ruido aleatorio, con distribución Gaussiana, media nula y desviación estándar especificada. Se estudió la sensibilidad del procedimiento para determinar el amortiguamiento y la constante elástica de un oscilador simple, usando diferentes amplitudes de ruido en los datos de entrenamiento de la red.

En la Figura 1 se representa el error porcentual de los valores determinados de amortiguamiento y rigidez en función de la amplitud del error en los elementos del vector desplazamiento, expresado como un porcentaje de la máxima amplitud de la oscilación. Estos valores son similares en magnitud a los determinados por Xu et al [11] con su método, con la diferencia que en los valores presentados aquí el amortiguamiento muestra mayor sensibilidad al ruido que la rigidez, mientras que en el trabajo de Xu los resultados muestran un comportamiento opuesto. Es decir, la rigidez es la más sensible al ruido.

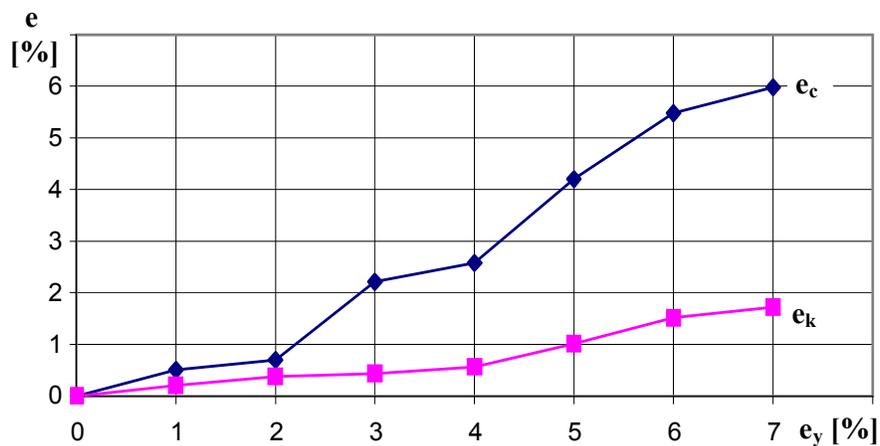


Fig. 1. Error porcentual en el cálculo del amortiguamiento (azul, e_c) y rigidez (rojo, e_k) de un sistema lineal de 1 GLD en función de la amplitud del ruido e_y incorporado en los datos de entrada del modelo neuronal.

Luego, en una segunda etapa, se entrenó la red con datos sin ruido y se introdujo el ruido en la salida de los modelos neuronales, previo al cálculo de sus derivadas. En la Figura 2 se muestran los resultados obtenidos. Al igual que en la figura anterior, se representan los errores porcentuales del amortiguamiento y rigidez en las ordenadas y el error porcentual incorporado a la respuesta del sistema en la abscisa. El objeto de este segundo estudio fue confirmar la capacidad filtrante del modelo neuronal ya que, como se observa, en este caso la sensibilidad al ruido prácticamente se ha duplicado.

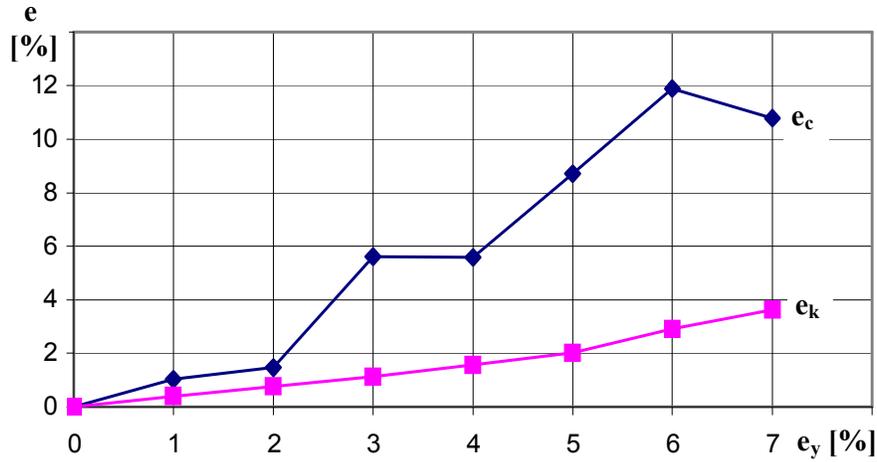


Fig. 2. Error porcentual en el cálculo del amortiguamiento (azul, e_c) y rigidez (rojo, e_k) de un sistema lineal de 1 GLD en función de la amplitud del ruido e_y incorporado en la salida del modelo neuronal.

Un aspecto que merece destacarse es que el procedimiento aquí presentado es formulado en su totalidad a través del álgebra matricial, lo que lo independiza de la complejidad o dimensión del sistema estudiado, facilitándose su implementación sistemática. Esto lo distingue de otros procedimientos que han sido presentados con la misma finalidad, como es el caso del ya mencionado trabajo de Xu et al [11] y los de Jovanović [12] y Trivailo et al [13], donde no parece que las propuestas sean fácilmente extensibles al tratamiento de sistemas más complejos que los de los ejemplos allí mostrados.

5 Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo se presentó un procedimiento para obtener las frecuencias, modos de vibración, y eventualmente las matrices de rigidez y amortiguamiento de sistemas mecánicos lineales. Se emplearon para ello modelos neuronales y álgebra matricial, en una propuesta destinada a abordar problemas complejos con numerosos grados de libertad. Los resultados obtenidos con sistemas simples permitieron confirmar las ventajas del procedimiento presentado, como así también su robustez ante señales de entrada ruidosas. Se espera que este método sea de utilidad; tanto en el área estructural, en la predicción de daños estructurales, como en el área de la robótica, en la linealización e identificación de parámetros de mecanismos complejos.

Para continuar este trabajo se considerarán progresivamente otros problemas de mayor dimensión y complejidad, con la finalidad de confirmar el buen desempeño del método propuesto en todos los casos.

Reconocimiento

El trabajo presentado está inscripto en el proyecto “Evaluación de arquitecturas y técnicas de entrenamiento de Redes Neuronales Artificiales Multicapa de Perceptrones”, que cuenta con el apoyo de la Agencia Córdoba Ciencia, del Gobierno de la Provincia de Córdoba (Expte. No. 0279-004549/2005).

Referencias

1. Valishevsky, A.: Comparative analysis of different approaches towards multilayer perceptron training, Department of Computer Science, University of Latvia, Riga (1998).
2. Rumelhart, D., Hinton, G., Williams, R.: Learning internal representations by error propagation. *Parallel distributed processing: Explorations in the microstructures of cognition*, MIT Press, 1:318-362 (1986).
3. Chandra, P., Singh, Y.: Fault tolerance of feedforward artificial neural networks- a framework of study. *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks*. Vol. 1, Pg.489-494. School of Information Technology. Indraprastha University. Delhi, India (2003).
4. Haecker, J.; Rudolph, S.: On neural network topology design for nonlinear control, In: *Proceedings SPIE Aerosense 2001 Conference On Applications and Science of Computational Intelligence IV*, Orlando, Florida, April 16-20 (2001).
5. Aguado, A., Martínez, M.: *Identificación y Control Adaptativo*. Prentice Hall (2003).
6. Houbolt, J.: A recurrent matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft. *Journal of Aeronautical Science*, Vol 17:540-550 (1950).
7. Semler, C., Gentleman, C. Paidoussis, M.: Numerical solutions of second order implicit non-linear ordinary differential equations. *Journal of Sound and Vibration*, 195(4), Pg.553-574 (1996).
8. Aström, K., Eykhof, P.: *System Identification: a survey*. Second IFAC Symposium on Identification and Process Parameter Identification. Praga (1971).
9. Plagianakos, Magoulas, Vrahatis.: Deterministic nonmonotone strategies for effective training of multilayer perceptrons. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 13(6):1268-1284 (2002).
10. Giró, J., Olariaga, S., Paez, N., Garcia, A., Vuirli, A.: Definición y evaluación de Modelos Neuronales para Sistemas de Control. *Jornadas Argentinas de Robótica (JAR)*. Universidad Tecnológica Nacional. Córdoba, Argentina (2006).
11. Xu, B., Wu, Z., Chen, G., Yokohama K.: Direct identification of structural parameters from dynamic responses with Neural Networks. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Pg. 931-943. Elsevier (2004).
12. Javanović, O.: Identification of Dynamic System using Neural Network. *The Scientific Journal, Series Architecture and Civil Engineering*. Vol. 1, No.4, Pg. 525-532. University of Nis. Yugoslavia (1997).
13. Trivailo, P., Dulikravich, G., Sgarioto, D., Gilbert, T.: Inverse problem of Aircraft Parameter Estimation: application of Neural Networks. *Inverse Problems, Design and Optimization Symposium*. Rio de Janeiro, Brazil (2004).